# COMPTES RENDUS

## DES SÉANCES

# DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

---

### SÉANCE DU LUNDI 16 SEPTEMBRE 1901,

PRÉSIDÉE PAR M. BOUQUET DE LA GRYE.

---

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

### DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

OPTIQUE. — *Démonstration et usage des formules relatives au réfractomètre.* Note de **M. A. Cornu**.

« Les formules données précédemment (p. 125-130) pour la détermination complète en grandeur et en direction des paramètres optiques d'un cristal peuvent être établies d'une manière assez simple.

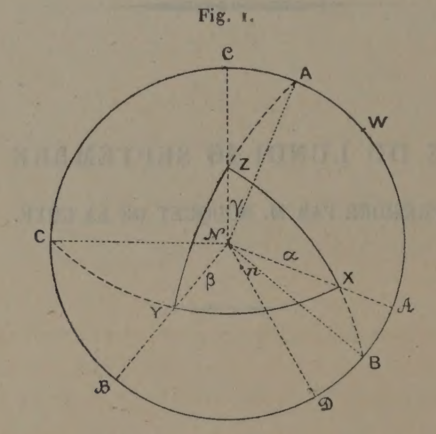
» Le premier groupe (4) est purement géométrique : il fournit les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, que la normale $\mathfrak{N}$ à la face cristalline (*fig.* 1) fait avec les trois axes principaux X, Y, Z, indépendamment de la grandeur des paramètres $\left(a = \frac{1}{n_x}, b = \frac{1}{n_y}, c = \frac{1}{n_z}\right)$ de l'ellipsoïde qui caractérise la surface de l'onde lumineuse dans le cristal.

» Le second groupe (5), au contraire, dépend essentiellement de ces paramètres en grandeur et en direction, ainsi que la formule (3) établie au cours de l'analyse du phénomène.

» *Premier groupe.* — La projection stéréographique ci-dessous fournit immédiatement les triangles sphériques qui lient les angles inconnus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ aux données de l'observation : ces données sont les azimuts $\mathcal{N}A$, $\mathcal{N}B$, $\mathcal{N}C$ des trois plans de réflexion dans lesquels on a mesuré les incidences qui ont fourni respectivement les indices $n_x$, $n_y$, $n_z$.

» La normale $\mathcal{N}$ à la face réfléchissante (supposée dans l'intérieur du trièdre tri-rectangle des axes, comme sur la figure, hypothèse que l'on peut toujours faire) est

Fig. 1.




le sommet de trois triangles rectilatères $X\mathcal{N}Y$, $Y\mathcal{N}Z$, $Z\mathcal{N}X$ dont les côtés communs sont précisément les arcs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ : les angles en $\mathcal{N}$ ont pour mesure les arcs $\widehat{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, $\widehat{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, $\widehat{\mathcal{C}\mathcal{A}}$ respectivement égaux aux arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ comme tournés *dans le même sens* de 90°. (Il n'en serait pas ainsi dans le cas où $\mathcal{N}$ serait en dehors du triangle XYZ). Ainsi dans $X\mathcal{N}B$ on a la relation

$$o = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\widehat{AB},$$

d'où l'on tire cos AB et les deux autres cosinus analogues, par permutation tournante, car la permutation s'applique dans le même sens à l'ordre de succession des points A, B, C : XYC, YZA, ZXB. Il vient donc :

$$\cos\widehat{AB} = -\cot\alpha\cot\beta,$$

$$\cos\widehat{BC} = -\cot\beta\cot\gamma,$$

$$\cos\widehat{CA} = -\cot\gamma\cot\alpha.$$

Divisons la seconde équation par le produit des deux autres; il vient

$$(4_a)\qquad \tan^2\alpha = -\frac{\cos\widehat{BC}}{\cos\widehat{AB}\cos\widehat{CA}}.$$

C'est la première formule du groupe (4) (p. 130).

» Les trois angles $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ ayant entre eux la relation

$$\widehat{AB}+\widehat{BC}+\widehat{CA}=360°,$$

on peut éliminer l'un d'eux dans la formule $(4_a)$, par exemple $\widehat{BC}$,

$$\cos\widehat{BC}=\cos\left(\widehat{AB}+\widehat{CA}\right).$$

Substituant et réduisant, il vient [1]

$$(4_b)\qquad \begin{cases} \cos^2\alpha = \cot\widehat{AB}\cot\widehat{CA},\\ \cos^2\beta = \cot\widehat{BC}\cot\widehat{AB},\\ \cos^2\gamma = \cot\widehat{CA}\cot\widehat{BC},\end{cases}$$

valeurs qui satisfont d'elles-mêmes à la condition

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

» Ces formules, purement géométriques, sont théoriquement à l'abri de toute difficulté dans leur emploi : mais, en pratique, l'incertitude inévitable que présente la détermination de l'azimut d'un maximum ou d'un minimum amène parfois des embarras dont il faut être prévenu.

» Ainsi, il peut arriver que les données de l'observation substituées dans les formules $(4_b)$ conduisent à des valeurs négatives pour les carrés des cosinus, c'est-à-dire à des solutions imaginaires pour les angles $\alpha$, $\beta$

---

(1) On peut, par une simple construction géométrique, obtenir ces angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, c'est-à-dire déduire directement les points X, Y, Z des points A, B, C, en superposant à la projection stéréographique une projection orthogonale auxiliaire sur le plan de la face cristalline qui est ici le plan de la figure. On sait, en effet, que la projection orthogonale du sommet d'un trièdre trirectangle sur un plan qui coupe ses trois arêtes est le point de concours des trois hauteurs du triangle, intersection des trois faces avec le plan sécant. On reconnaît aisément que les trois côtés de ce triangle sont parallèles aux directions $\mathcal{M}$A, $\mathcal{M}$B, $\mathcal{M}$C et les trois hauteurs à $\mathcal{M}\mathcal{A}$, $\mathcal{M}\mathcal{B}$, $\mathcal{M}\mathcal{C}$.

Prenant le point $\mathcal{M}$ comme point de concours des trois hauteurs $\mathcal{M}\mathcal{A}$, $\mathcal{M}\mathcal{B}$, $\mathcal{M}\mathcal{C}$ d'un triangle de dimension arbitraire on est conduit à un trièdre dont on construit tous les éléments angulaires par des rabattements évidents.

ou $\gamma$. Or, d'après la nature du problème, ces valeurs sont nécessairement réelles [1] : il faut donc que les trois cotangentes soient de même signe; par suite, les angles $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ ramenés entre 0° et 180° par addition ou soustraction de 180° doivent aussi être de même signe. Cette condition fournit un contrôle qualitatif de l'exactitude des observations; si elle n'est pas remplie, c'est qu'il s'est glissé quelque erreur; il y a lieu alors de reviser les observations et, au besoin, de recommencer les mesures jusqu'à ce que les azimuts satisfassent à la condition de réalité du cosinus.

» Il y a cependant un cas où l'on n'y parvient pas d'une manière satisfaisante, à cause de l'incertitude des observations. C'est celui où certaines différences d'azimut sont très voisines de 90°; alors une petite erreur dans les mesures peut rendre un angle plus grand ou plus petit que 90° et, par conséquent, faire passer la cotangente du signe positif au négatif. Mais on est averti par là du fait que la face cristalline utilisée est presque parallèle à l'un des axes principaux : les valeurs des produits des cotangentes sont indéterminées; dès lors cette face, bien que susceptible de fournir les trois indices principaux, est, par son orientation, impropre à la détermination précise des trois directions principales, du moins à l'aide des formules $(4_b)$.

» On est alors amené à supposer que, au moins comme première approximation, l'un des angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, par exemple $\alpha$, est égal à 90° exactement; et, par suite, $\cot\alpha = 0$.

» Il reste la relation

$$\cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1 \qquad \text{ou} \qquad \beta' + \gamma' = 90°.$$

» On utilise alors la valeur du quatrième indice $\nu$ pour la détermination de $\beta'$, laquelle demeure la seule inconnue.

» L'équation

$$(2) \qquad \nu^2 = n_x^2\cos^2\alpha + n_y^2\cos^2\beta + n_z^2\cos^2\gamma$$

peut en effet se mettre sous la forme

$$\nu^2(\cos^2\beta' + \sin^2\beta') = n_y\cos^2\beta' + n_z^2\sin^2\beta',$$

---

(1) La construction géométrique précitée en donne la preuve : la construction du triangle auxiliaire dont les directions des trois hauteurs sont données est toujours possible.

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}^2 \beta' = \frac{\nu^2 - n_z^2}{n_y^2 - \nu^2};$$

expression ([1]) qui achève de déterminer l'orientation de la normale à la face cristalline dans l'hypothèse où cette face est rigoureusement parallèle à l'axe OY ($\alpha = 90°$, $\beta = \beta'$, $\gamma' = 90° - \beta'$).

» En général, l'hypothèse $\alpha = 90°$ ne sera qu'approchée et, bien que la valeur de $\beta'$ soit plus exacte qu'on ne pourrait le penser, la conclusion qu'on tirera de ces mesures sera la nécessité de recourir à une autre face cristalline orientée dans une direction plus favorable, afin d'obtenir des données meilleures et une vérification des résultats obtenus. Lorsqu'on est maître de choisir cette orientation, on prend, pour $O\mathfrak{N}$, la direction qui fait, avec les axes OX, OY, OZ (supposés connus approximativement), des angles sensiblement égaux.

» *Remarques.* — En dehors du cas particulier qui vient d'être signalé, on ne rencontre pas, en général, d'autre difficulté que l'ambiguïté existant entre l'indice moyen $n_y$ et le quatrième indice $\nu$.

» Dans ce qui précède, on l'a supposée levée par des considérations étrangères aux mesures; mais cette ambiguïté n'entraîne d'autre inconvénient que celui d'un calcul supplémentaire. En effet, si l'on n'a aucun motif de distinguer $n_y$ de $\nu$, on considère arbitrairement l'un des deux indices comme $n_y$ et, à l'aide des trois azimuts correspondant aux trois indices $n_x$, $n_y$, $n_z$ adoptés, on calcule les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Si le choix est bon, l'équation (3) vérifiera la valeur du quatrième indice considéré comme représentant $\nu$; sinon, on intervertira $n_y$ et $\nu$, B et $\mathfrak{D}$, et l'on recommencera le calcul de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ : la vérification de (3) devra alors être satisfaisante.

» *Second groupe.* — Le second groupe de formules (5) est destiné à fournir des vérifications en utilisant les données relatives au quatrième indice dont on mesure d'une part la grandeur $\nu$, d'autre part l'azimut $\mathfrak{N}\mathfrak{D}$ du plan de réflexion où on l'observe.

» L'équation (3), déjà employée, doit être rangée dans ce groupe, bien qu'elle ait été établie directement, car elle constitue aussi une relation de contrôle entre les indices $n_x$, $n_y$, $n_z$, $\nu$ et les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

» Celles qu'il reste à démontrer se rapportent aux azimuts $\mathfrak{N}$A, $\mathfrak{N}$B,

---

([1]) Étant homogène par rapport à $n_y$, $n_z$ et $\nu$, la valeur de $\beta'$ est indépendante de la valeur de l'indice de réfraction de la substance réfringente auxiliaire des réfractomètres.

$\mathfrak{N}$C et $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ : la définition géométrique de la surface de l'onde déduite de l'ellipsoïde établit entre eux des relations qui permettent de calculer les angles A$\mathfrak{N}\mathfrak{O}$, B$\mathfrak{N}\mathfrak{O}$, C$\mathfrak{N}\mathfrak{O}$.

» La démonstration de ces formules se réduit à calculer les cosinus directeurs des diverses directions nécessaires pour obtenir l'expression des angles qu'elles font entre elles. Ce calcul un peu laborieux n'offre, d'ailleurs, aucune difficulté.

» *Direction* $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$. — D'après l'analyse du phénomène (p. 128), l'azimut $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ est la trace du plan qui passe par la normale $n$ à l'ellipsoïde au point où la normale $\mathfrak{N}$ à la face réfléchissante rencontre cette surface.

» Calculons d'abord les cosinus directeurs $\xi', \eta', \zeta'$ de la normale $\mathfrak{N}\mathfrak{O}'$ à ce plan (non tracée sur la figure) rapportée aux axes X, Y, Z.

» Ils sont déterminés par les trois conditions

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=1, \qquad \xi'\alpha+\eta'\beta+\zeta'\gamma=0, \qquad \xi'\frac{\alpha}{a^2}+\eta'\frac{\beta}{b^2}+\zeta'\frac{\gamma}{c^2}=0$$

qui expriment, outre la rectangularité des axes, que $\mathfrak{N}\mathfrak{O}'$ est normale à $\mathfrak{N}$ et à $n$ (on a remplacé, pour abréger l'écriture, $\cos\alpha$, ... par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$); d'où l'on tire

$$(\mathfrak{O}') \qquad \frac{\xi'}{\beta\gamma(n_z^2-n_y^2)}=\frac{\eta'}{\gamma\alpha(n_x^2-n_z^2)}=\frac{\zeta'}{\alpha\beta(n_y^2-n_x^2)}=\frac{1}{\mathfrak{R}},$$

expressions où les carrés des indices principaux remplacent les inverses des carrés des axes de l'ellipsoïde.

» D'après les relations bien connues entre les neuf cosinus d'un trièdre trirectangle, on écrira immédiatement les cosinus directeurs $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de la trace $\mathfrak{N}\mathfrak{O}$ du plan $\mathfrak{N}n$ sur le plan de la face cristalline, car elle forme un trièdre trirectangle avec $\mathfrak{N}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathfrak{O}'(\xi', \eta', \zeta')$

$$\xi=\beta\zeta'-\gamma\eta', \qquad \eta=\gamma\xi'-\alpha\zeta', \qquad \zeta=\alpha\eta'-\beta\xi'.$$

» Après substitution et réduction en ayant égard à l'équation (2), on trouve

$$(\mathfrak{O}) \qquad \frac{\xi}{\alpha(\nu^2-n_x^2)}=\frac{\eta}{\beta(\nu^2-n_y^2)}=\frac{\zeta}{\gamma(\nu^2-n_z^2)}=\frac{1}{\mathfrak{R}},$$

le radical $\mathfrak{R}$ étant évidemment le même que pour $\mathfrak{O}'(\xi', \eta', \zeta')$.

» *Directions* $\mathfrak{N}$A, $\mathfrak{N}$B, $\mathfrak{N}$C. — Calculons par exemple les cosinus directeurs de $\mathfrak{N}$A$(X_a, Y_a, Z_a)$, les autres s'obtiendront par permutation tournante. $\mathfrak{N}$A est la normale au plan qui passe par $\mathfrak{N}(\alpha, \beta, \gamma)$ et par l'axe OX(1, 0, 0) : d'où les trois conditions

$$X_a^2+Y_a^2+Z_a^2=1, \qquad X_a\alpha+Y_a\beta+Z_a\gamma=0, \qquad X_a=0,$$

d'où

$$\frac{X_a}{0}=\frac{Y_a}{\gamma}=\frac{Z_a}{-\beta}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

» On en conclut

$$(\mathrm{A}) \qquad X_a=0, \qquad Y_a=\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}, \qquad Z_a=\frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

» *Calcul des angles* $\widehat{A\mathcal{W}}$, $\widehat{B\mathcal{W}}$, $\widehat{C\mathcal{W}}$. — On a évidemment, à l'aide des valeurs calculées ci-dessus,

$$\cos\widehat{A\mathcal{W}} = \xi X_a + \eta Y_a + \zeta Z_a = \frac{\beta\gamma(n_z^2 - n_y^2)}{\mathcal{R}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

» Le radical $\mathcal{R}$ est compliqué et se prête mal au calcul numérique. On tourne cette difficulté en utilisant $\cos A\mathcal{W}'$ qui est égal en valeur absolue à $\sin A\mathcal{W}$, puisque $N\mathcal{W}$ et $N\mathcal{W}'$ sont rectangulaires,

$$\sin\widehat{A\mathcal{W}} = \xi' X_a + \eta' Y_a + \zeta' Z_a = \frac{\alpha(n^2 - \nu^2)}{\mathcal{R}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}.$$

» Divisant membre à membre, il vient, après avoir remis $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ au lieu de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$(5_a) \qquad \operatorname{tang}\widehat{A\mathcal{W}} = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}\,\frac{n_x^2 - \nu^2}{n_z^2 - n_y^2},$$

et les deux autres expressions analogues de $\widehat{B\mathcal{W}}$, $\widehat{C\mathcal{W}}$.

» On les simplifie encore en remplaçant les cosinus par leur valeur tirée de $(4_b)$

$$(5_b) \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\widehat{A\mathcal{W}} &= \operatorname{tang}\widehat{BC}\,\frac{\nu^2 - n_x^2}{n_y^2 - n_z^2},\\ \operatorname{tang}\widehat{B\mathcal{W}} &= \operatorname{tang}\widehat{CA}\,\frac{\nu^2 - n_y^2}{n_z^2 - n_x^2},\\ \operatorname{tang}\widehat{C\mathcal{W}} &= \operatorname{tang}\widehat{AB}\,\frac{\nu^2 - n_z^2}{n_x^2 - n_y^2},\end{aligned}\right.$$

expressions très simples qui fournissent un contrôle précieux de l'ensemble des paramètres optiques du cristal, car les trois angles calculés ci-dessus ont été directement observés.

» Pour achever la détermination de la constitution optique du cristal il reste à définir l'orientation des trois axes X, Y, Z, par rapport aux axes cristallographiques. Or la direction de repère $\mathcal{N}W$ observée en même temps que $\mathcal{N}A$, $\mathcal{N}B$, $\mathcal{N}C$ permet d'opérer ce raccordement, car l'orientation cristallographique de la face $\mathcal{N}$ est supposée connue ainsi que $\mathcal{N}W$. Il ne reste plus alors à effectuer que des calculs familiers aux cristallographes. »

# CORRESPONDANCE.

MÉCANIQUE. — *Sur la voûte élastique.* Note de M. G. **Poisson**.

« Dans une Note présentée à l'Académie le 13 février 1899, j'ai donné une solution particulière du problème de la voûte élastique supportant une charge hydrostatique.

» La présente Note a pour objet de faire connaître une solution plus générale du même problème.

» La méthode employée est la même que dans le cas précédemment étudié; elle est fondée sur la considération des filets élémentaires obtenus en décomposant la section droite de la voûte par une série de courbes orthopiéziques infiniment rapprochées.

» Dans une Note présentée à l'Académie le 2 octobre 1899, j'ai donné les équations d'équilibre des filets ainsi définis, qui sont

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}[(p_1 - p_2)\varepsilon] + \Pi\varepsilon\sin\alpha + \varepsilon\dfrac{dp_2}{ds} = 0, \\ \dfrac{p_1 - p_2}{r} + \Pi\cos\alpha + \dfrac{dp_2}{dn} = 0, \end{cases}$$

en appelant $p_1$ et $p_2$ les pressions suivant la tangente et la normale au filet, $ds$ et $dn$ les éléments de courbe suivant les mêmes directions, $\alpha$ l'angle du filet avec l'axe des $x$, $r$ son rayon de courbure, $\varepsilon$ sa largeur infiniment petite, et $\Pi$ le poids spécifique des matériaux de la voûte.

» Pour utiliser ces formules, il suffit de faire des hypothèses sur le mode de variation de $p_2$ et de $\varepsilon$ le long de chaque filet.

» Supposons, en particulier, que l'on ait

$$(2)\qquad \begin{cases} p_2 = ay + b, \\ \varepsilon = y\,dk, \end{cases}$$

$a$, $b$ et $dk$ étant des quantités constantes pour chaque filet.

» La première équation donne, en annulant la constante d'intégration,

$$p_1 - p_2 + (\Pi + a)\frac{y}{2} = 0,$$

ce qui transforme la deuxième équation en

$$(\Pi + a)\left(-\frac{y}{2r} + \cos\alpha\right) + \frac{da}{dn}y + \frac{db}{dn} = 0.$$

Mais, en remarquant que l'on a, par définition,

$$\frac{da}{dn} = \frac{da}{dk}\frac{1}{y}, \qquad \frac{db}{dn} = \frac{db}{dk}\frac{1}{y},$$

et en annulant encore la constante d'intégration, on obtient

$$\cos\alpha + \frac{1}{\Pi + a}\left(\frac{da}{dk} + 2\frac{db}{dk}\frac{1}{y}\right) = 0;$$

soit, en posant

$$m = -\frac{da}{dk}\frac{1}{\Pi + a}, \qquad n = -2\frac{db}{dk}\frac{1}{\Pi + a},$$

$$(3) \qquad \cos\alpha = m + \frac{n}{y}.$$

» L'intégration donne, dans le cas où $m$ est plus petit que 1, le système d'équations suivant :

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{n}{(1 - m^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\varphi + m\dfrac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\right), \\ y = \dfrac{n}{(1 - m^2)^{\frac{3}{2}}}\left(m\sqrt{1 - m^2} + \sqrt{1 - m^2}\,\dfrac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}\right). \end{cases}$$

» Les courbes représentées par ces équations sont à la chaînette ce que les trochoïdes sont à la sinusoïde ; on peut les appeler *trochoïdes hyperboliques*.

» Pour achever de définir le faisceau formé par ces courbes, il faut exprimer la condition que l'écartement de deux courbes infiniment voisines est égal à $y\,dk$.

» En écrivant les équations sous la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} x = c\left(x_0 + m\dfrac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2}\right), \\ y = c\left(y_0 + \sqrt{1 - m^2}\,\dfrac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2}\right), \end{cases}$$

on satisfait à la condition indiquée en posant

$$c = \text{const.} \qquad \frac{dm}{dy_0}\frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} = -1, \qquad dk = \frac{dy_0}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

» On en déduit

$$m = \cos y_0, \qquad a = \frac{c'}{\sin y_0} - \text{II}, \qquad b = \frac{cc'}{2}\cos y_0 + c''.$$

» On dispose donc de trois constantes arbitraires. Or il faut satisfaire à quatre équations de condition pour donner à $a$ et à $b$ leurs valeurs particulières sur l'extrados et l'intrados de la voûte. Par suite, on pourra, soit prendre arbitrairement l'une des courbes du réseau pour intrados, soit, ce qui est préférable, adopter un maximum pour la pression.

» Pour que la solution soit rigoureuse, il faut qu'elle satisfasse à la condition d'élasticité

$$\Delta_2(p_1 + p_2) = 0. \tag{6}$$

Or, en additionnant les deux équations (5) après avoir multiplié la deuxième par l'imaginaire $i$, on obtient

$$x + iy = c(x_0 + iy_0) + c\,\frac{e^{x_0+iy_0} - e^{-(x_0+iy_0)}}{2}.$$

» Le réseau de courbes considéré représente donc les lignes de force d'un potentiel.

» Il est facile de démontrer que dans ce cas la condition (6) est toujours remplie. »

TÉLÉGRAPHIE ÉLECTRIQUE. — *Sur l'emploi simultané de la Télégraphie multiplex et de la Télégraphie ordinaire dans le même circuit.* Note de M. E. **Mercadier**.

« On sait qu'à l'aide de dispositifs variés (appareils Van Rysselberghe, Maiche, Cailho, Picard, etc.) placés en dérivation sur un circuit téléphonique, on peut envoyer *simultanément*, dans le circuit, des signaux téléphoniques et des signaux provenant d'appareils de Télégraphie ordinaire, Morse, Hughes, etc.

» Ce résultat tient à la différence entre les propriétés et les effets des courants continus et ceux des courants ondulatoires produits dans les appareils téléphoniques. Mais il doit en être de même pour tout système de Télégraphie, autre qu'un téléphone, utilisant des courants ondulatoires pour la formation des signaux, par exemple le système de Télégraphie multiplex, que j'ai décrit dans les *Comptes rendus*, dans les *Annales télégra-*

*phiques* de 1898, dans le *Journal de Physique* de 1900, et dans lequel les signaux résultent de l'utilisation de courants ondulatoires produits par des électrodiapasons.

» J'avais, en effet, annoncé comme certain l'emploi *simultané*, dans un même circuit, de la Télégraphie multiplex et de la Télégraphie ordinaire. J'ai eu récemment l'occasion de le vérifier très nettement.

» En faisant, au mois de juillet dernier, des essais de Télégraphie multiplex sur un circuit de Paris à Bordeaux, et en utilisant l'un des dispositifs indiqués ci-dessus (celui de M. Cailho), on a vu qu'on pouvait, pendant des heures entières, faire transmettre et recevoir des télégrammes dans le système multiplex à courants ondulatoires par plusieurs opérateurs (jusqu'à douze à la fois), et, *pendant le même temps, sans même que ces opérateurs s'en aperçussent*, faire transmettre et recevoir, avec un appareil Morse, un appareil Hughes, et même un appareil Baudot à quatre claviers, des signaux quelconques, des avis de service, des télégrammes, en utilisant ainsi des courants continus.

» Ce résultat a été obtenu, non seulement dans les stations extrêmes Paris et Bordeaux, mais encore dans une station intermédiaire établie à Tours, dans le même circuit.

» Ces expériences n'ont d'ailleurs présenté aucune difficulté, et elles n'ont nécessité aucune espèce de modifications aux appareils de Télégraphie ordinaire et multiplex. Leur importance, au point de vue scientifique et à celui de l'exploitation intensive des réseaux télégraphiques, paraîtra sans doute évidente; car, d'une part, elles montrent qu'en un point d'un circuit métallique on peut, à chaque instant, faire croiser sans qu'ils se confondent jusqu'à vingt-cinq mouvements électriques simultanés, confirmation expérimentale remarquable de la loi mécanique des petits mouvements; et, d'autre part, que, soit entre deux postes extrêmes reliés par un circuit de $700^{km}$ à $800^{km}$ de longueur, soit entre des postes échelonnés le long de ce circuit, on peut échanger plus de 1300 télégrammes de 20 mots par heure, dont plus de 900 dans n'importe quel sens.

» Pour donner une idée simple de la rapidité des transmissions qu'on peut obtenir ainsi, il suffit de dire que le texte d'une page d'un grand journal, comme le *Temps*, qui peut renfermer jusqu'à 9000 mots environ, serait transmis de Paris à Bordeaux : par le système multiplex seul, comportant douze transmetteurs (en découpant ce texte en douze parties), dans l'espace d'une heure seulement; par le Multiplex et un Baudot à quatre claviers opérant *simultanément* (en découpant le texte en seize

parties), dans une demi-heure environ ; de plus, *pendant cette même demi-heure*, le poste de Bordeaux pourrait transmettre à Paris par le Multiplex, avec les mêmes appareils, un texte équivalent à une demi-page du même journal. »

CHIMIE. — *Sur le poids moléculaire de l'hydrate de chloral à la température de l'ébullition.* Note de M. DE FORCRAND.

« On peut se proposer d'appliquer la règle que j'ai donnée récemment ([1]) au cas de certains composés qui se dissocient plus ou moins complètement à la température de l'ébullition. La valeur trouvée pour M fera connaître s'il y a réellement dissociation, et, dans une certaine mesure, quelle en est l'importance.

» Considérons comme exemple l'hydrate de chloral, pour lequel les données thermochimiques nécessaires sont à peu près toutes connues, et admettons, comme première approximation, une dissociation complète à la température de l'ébullition (+ 96°,5 C.). M. Berthelot a donné

$$L = 21\,900^{cal}, \qquad S = 5500^{cal},$$

d'où

$$\frac{L+S}{369,5} = 74,1.$$

» Ce nombre 74,1 est plus du double de la moyenne 30 ; mais, dans notre hypothèse, il doit en être ainsi pour deux raisons. D'abord l'hydrate se trouvant complètement séparé en eau et chloral, nous avons deux molécules et la valeur moyenne du quotient doit être 60. En outre, le terme $21\,990^{cal}$ comprend en réalité la chaleur de volatilisation et la chaleur de combinaison ($+ 6230^{cal}$, d'après M. Berthelot).

» Nous devons donc retrancher ici $6230^{cal}$ de 21900 + 5500 et trouver comme quotient un nombre voisin de 60. En effet, on obtient 57,30.

» Bien plus, ce quotient est un peu plus faible que 60, quoique très voisin, ce qui indique que la dissociation n'est pas absolument totale. Et ce résultat confirme dans son sens général celui des expériences bien connues de M. Berthelot. A la température de l'ébullition, la vapeur donnée par l'hydrate de chloral contient à la fois de l'eau, du chloral, et un peu d'hydrate non dissocié.

---

([1]) *Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 368.

» Sous une autre forme, on peut dire que si

$$21900 + 5500 - 6230 = 21170^{\text{cal}}$$

représente la valeur de $(L + S)$ pour $165^{\text{gr}},5$ d'hydrate du chloral, on aura, pour $1^{\text{gr}}$,

$$l + s = 128^{\text{cal}}$$

et

$$\frac{128 \times M}{369,5} = 30,$$

d'où

$$M = 86,60;$$

c'est la valeur du poids moléculaire à l'ébullition, alors que le poids moléculaire moyen serait $\frac{165,5}{2} = 82,75$, s'il y avait dissociation complète.

» On objectera sans doute à cette démonstration que la règle que j'applique n'est certaine qu'à $\frac{1}{15}$ près, et que les différences que je constate sont précisément de cet ordre.

» Mais il y a lieu de remarquer que, pour l'eau, la valeur de $\frac{L + S}{T} = 29,73$ est bien connue et précisément très voisine de la valeur moyenne 30. Pour le chloral anhydre, on connaît seulement $L = 7630$, mais non pas S. Cependant, comme on sait que la chaleur de solidification de l'hydrate est $5500^{\text{cal}}$, on peut calculer S avec une approximation suffisante en retranchant de ce dernier nombre la chaleur de solidification de l'eau, 1430. Il vient alors

$$S = 4070;$$

par suite

$$\frac{L + S}{T} = \frac{7630 + 4070}{372,1} = 31,44,$$

nombre qui est encore compris entre les limites extrêmes 28 et 32.

» Enfin on sera autorisé à prendre la moyenne entre 29,73 et 31,44, soit 30,585, pour représenter la valeur du quotient $\frac{L + S}{T}$ aussi bien pour l'eau que pour le chloral et même pour l'hydrate dans le raisonnement qui précède. Cette moyenne diffère à peine du nombre adopté 30. Elle donnerait, pour le poids moléculaire,

$$M = \frac{369,5 \times 30,585}{128} = 88,29.$$

» Il semble même que l'on pourrait aller plus loin et déterminer la portion d'hydrate non dissociée. Ne connaissant pas très exactement la valeur du coefficient 30,585, le calcul serait, dans ce cas, trop incertain. Je donne seulement, à titre de renseignement, ce résultat que la fraction non dissociée serait de 4 ou de 5 pour 100 suivant que l'on admet 30 ou 30,585.

» Ce qui se dégage surtout de cette étude, c'est que ma relation permet d'aborder des problèmes de ce genre, et que, dans le cas particulier de l'hydrate de chloral, elle confirme ce fait qu'à la température normale de l'ébullition sa dissociation n'est pas totale. »

PÉTROGRAPHIE. — *Sur la dunite du Koswinsky-Kamen (Oural).* Note de MM. L. **Duparc** et F. **Pearce**, présentée par M. Michel Lévy.

« Dans une Note précédente, nous avons signalé le fait que la *koswite*, roche massive qui constitue en grande partie le Koswinsky, est traversée par des filons d'une roche à olivine que nous rapportons à la dunite.

» Cette roche, assez répandue dans le massif, est d'habitude finement grenue, noirâtre ou verdâtre; les filons, répartis sur les points les plus divers, sont toujours nettement caractérisés. Par altération, elle se recouvre d'une croûte rougeâtre, qui garde une structure grenue manifeste; la roche ainsi altérée simule alors à s'y méprendre un grès ferrugineux. Quand on la débarrasse de cette enveloppe plus ou moins épaisse, on trouve une roche verte, un peu différente de la dunite fraîche, moins grenue, et d'aspect serpentineux.

» Ces filons de dunite en voie de serpentinisation sont très particulièrement nombreux dans l'extrémité nord-est du massif, ils y criblent littéralement la koswite. Cette même dunite, nettement filonienne au Koswinsky, se retrouve comme roche massive, constituant dans son ensemble une arête rocheuse assez puissante et étendue, qui flanque le Koswinsky à l'ouest; elle est séparée de la koswite par des gabbros à olivine avec lesquels elle entre en contact, mais qu'elle ne traverse point en filons distincts.

» Au point de vue microscopique, les dunites montrent deux types assez différents : le premier, assez rare d'ailleurs, est représenté par une roche noirâtre, finement grenue, très dense, qui paraît imprégnée de magnétite. Elle est en réalité formée par des grains arrondis d'olivine incolore et hyaline, réunis par de nombreuses plages,

de magnétite sidéronitique, renfermant quelques grains de spinelles chromifères. Cette roche est d'un type chimique fort curieux, caractérisé par sa richesse exceptionnelle en fer.

» Le second type, de beaucoup le plus fréquent, est représenté par une roche verdâtre, moins dense, qui sous le microscope est exclusivement formée par des grains d'olivine, légèrement craquelés, et directement pressés les uns contre les autres. La magnétite, toujours rare, se trouve alors en petits octaèdres disséminés çà et là. Les variétés absolument fraîches se rencontrent difficilement; en général il y a toujours un commencement de serpentinisation le long des cassures, et l'on peut alors observer toutes les variétés entre la roche non altérée et une véritable serpentine. La dunite est tout d'abord découpée par de larges rubans peu biréfringents d'un minéral serpentineux en un véritable réseau à mailles plus ou moins serrées. Ces rubans sont positifs en long, ils présentent fréquemment une espèce de fibrosité transversale; leur biréfringence maxima ne dépasse pas 0,009. En certains endroits le minéral serpentineux paraît quasi isotrope; en lumière convergente il donne alors une croix noire uniaxe négative. Ces caractères coïncident avec ceux de l'antigorite; celle-ci, dans les régions où l'olivine a entièrement disparu, présente soit la structure maillée typique décrite par M. Lacroix, soit encore une structure différente, qui résulte de l'association en faisceaux de plusieurs gros rubans d'antigorite. Dans une position déterminée par rapport aux sections principales des nicols, ces rubans paraissent uniformément éclairés et l'on pourrait penser se trouver en présence d'un seul et même cristal; mais dès qu'on tourne la platine du microscope, ces rubans s'éclairent d'une façon différente et prennent un aspect moiré très caractéristique. Dans aucun cas nous n'avons constaté la transformation complète de l'olivine en antigorite; il reste toujours quelques petits noyaux de péridot, à la vérité parfois fort réduits.

» Les rapports chimiques qui lient les différentes variétés de dunites sont mis en évidence par les analyses qui suivent; le n° 26 est un type sidéronitique, les n$^{os}$ 9 et 701 sont grenus et pauvres en magnétite octaédrique, le n° 133 est à un stade peu avancé de serpentinisation, le n° 705 enfin est presque complètement serpentinisé.

*Analyses.*

| | N° 26. | N° 9. | N° 701. | N° 133. | N° 705. |
|---|---|---|---|---|---|
| $SiO^2$ | 31,84 | 39,22 | 39,89 | 36,85 | 35,41 |
| $Fe^2O^3$ | 15,63 | 0,38 | 3,82 | 5,60 | 4,43 |
| $Cr^2O^3$ / $Al^2O^3$ | 1,37 | 0,39 | 0,26 | 1,53 | 1,23 |
| FeO | 14,25 | 16,41 | 15,31 | 6,65 | 3,66 |
| MnO | | traces | traces | traces | traces |
| CaO | 0,91 | 1,20 | 1,04 | 1,09 | traces |
| MgO | 33,10 | 43,83 | 40,54 | 42,17 | 44,05 |
| Perte au feu | 2,49 | 0,40 | 0,18 | 6,53 | 12,28 |
| | 99,59 | 101,83 | 101,04 | 100,42 | 101,06 |

» *N. B.* — Dans les n$^{os}$ 133 et 705, l'alumine existe en très petite quantité et n'a pas été séparée; le précipité était du $Cr^2O^3$ presque pur. Ces analyses, faites au Laboratoire de Minéralogie de l'Université de Genève par MM. Yerchoff, Hercod, Wasmer et Petitat, montrent qu'abstraction faite du type sidéronitique il existe deux groupes chimiques parmi ces roches, le premier représenté par les n$^{os}$ 701 et 9, le second par les n$^{os}$ 133 et 705; la présence et l'abondance du chrome, ainsi que la différence dans la teneur en oxydes de fer, sont à ce point de vue caractéristiques; il est à remarquer que les n$^{os}$ 133 et 705 étant seuls atteints par la serpentinisation avancée, le développement de ce phénomène est peut-être en relation avec cette différence de composition. »

PALÉONTOLOGIE. — *Une nouvelle grotte avec parois gravées à l'époque paléolithique.* Note de MM. **L. Capitan** et **H. Breuil**, présentée par M. Henri Moissan.

« On sait qu'on a signalé, gravées sur les parois de certaines grottes et presque exclusivement en France (la Mouthe, Pair-non-Pair, grotte Chabot), des représentations d'animaux qu'on a pu considérer comme remontant à l'époque magdalénienne, à cause du remplissage de la grotte par des dépôts de cette époque (Pair-non-Pair), à cause de la technique mise en œuvre et des sujets représentés. Mais, jusqu'ici, ces représentations étaient peu nombreuses et la fraîcheur des traits pouvait expliquer certains doutes sur l'authenticité de quelques-unes de ces figures.

» Nous avons l'honneur de signaler à l'Académie l'existence de figurations d'animaux, gravées sur les parois d'une grotte sise aux Combarelles, commune de Tayac (Dordogne), à 2$^{km}$ environ de la grotte de la Mouthe et à 3$^{km}$ de la station classique des Eyzies.

» Cette grotte se compose d'un long boyau, d'une longueur totale de 225$^m$, sur une largeur moyenne de 1$^m$,50 à 2$^m$ et une hauteur variant de 0$^m$,50 à 3$^m$.

» Au commencement, les parois sont recouvertes d'une épaisseur considérable de stalagmites, sous laquelle on n'aperçoit que quelques rares traits. A 119$^m$ de l'entrée, commencent les premières figures nettes; elles se continuent, plus ou moins espacées, jusqu'à l'extrémité de la grotte, même en des points où la galerie n'a actuellement que 1$^m$,10 à peine de hauteur. C'est donc sur une longueur de près de 100$^m$ qu'on peut observer ces figures, de chaque côté de la galerie, soit un développement total de près de 200$^m$. Quelques-unes sont gravées sur la roche crétacée vive, mais le plus grand nombre sont recouvertes d'un enduit stalagmitique, quelquefois tellement épais que les traits disparaissent sous lui. Les figures mesurent : les unes 1$^m$ de longueur environ sur 0$^m$,75 à 1$^m$ de hauteur; d'autres n'ont pas plus de 0$^m$,20 à 0$^m$,30 de longueur sur 0$^m$,10 à 0$^m$,15 de hauteur.

» Certaines figures sont d'une netteté incroyable, tout à fait saisissante; d'autres

doivent être recherchées au milieu d'un grand nombre de traits enchevêtrés, mais on arrive ordinairement à les distinguer facilement. Plusieurs figures se mélangent l'une à l'autre, quelques traits de l'une étant utilisés pour la figure voisine, ce qui est un caractère fréquent dans les décorations de ce genre.

» Certains traits (surtout dans le fond de la grotte) sont accentués par un tracé au moyen d'une couleur noir bleuâtre, parfois recouverte par l'enduit stalagmitique.

» Toutes ces figures sont d'une correction de dessin qui permet de reconnaître nettement toute une série de détails des plus intéressants.

» Certaines figurations, surtout de Cheval, sont aussi remarquables et de même caractère que les plus belles gravures sur os classiques de l'époque magdalénienne.

» Les animaux représentés, tantôt en partie, tantôt entièrement, sont surtout le Cheval, puis un Équidé ressemblant à l'Hémione, le Bœuf, l'Aurochs, le Bouquetin, l'Antilope Saïga, le Renne et enfin (fait absolument nouveau) le Mammouth, puis certains animaux que nous n'avons pu identifier.

» Nous avons dessiné avec la plus rigoureuse exactitude, une à une, toutes ces représentations, en n'indiquant que celles qui étaient évidentes; nous en avons calqué une quinzaine des plus belles.

» Le nombre des figures d'animaux entiers que nous avons vues nettement est de 64; nous avons pu, en outre, dessiner 43 têtes d'animaux. Il existe aussi un nombre considérable de figurations partielles d'animaux (croupes, pattes), sans compter les traits encore plus nombreux enchevêtrés en tous sens que nous n'avons pu interpréter.

» Les figures nettement intelligibles et indiscutables se répartissent ainsi : animaux entiers non identifiés 19; Équidés 23; Bovidés 3; Bisons 2; Rennes 3; Mammouths 14; têtes de Bouquetin 3; têtes d'Antilope Saïga 4; têtes variées, surtout de Cheval 36; face humaine (?) 1; cupules 1; soit 109 figures très nettes. Elles sont en effet toutes d'une telle évidence qu'il ne peut y avoir de discussion sur leur interprétation. Tel, par exemple, un Cheval d'une perfection de dessin saisissante et qui semble porter sur le dos une sorte de couverture ornée de triangles; tel aussi un Équidé à crinière droite avec la partie supérieure du cou très convexe et à queue implantée très bas; tel également le Renne reproduit avec une fidélité qui ne peut laisser subsister aucun doute sur les caractères de cette espèce.

» Il en est de même pour l'Aurochs et pour les têtes de Bouquetin avec longues cornes recourbées en arrière, et celles d'Antilope Saïga avec longues cornes absolument droites. Quant aux figures de Mammouth, leur nombre permet de constater les caractères classiques de cet animal : front très haut avec concavité médiane, défenses très courbes, poils recouvrant complètement l'animal, et indiqués par de nombreux traits, pieds typiques. La trompe est tantôt droite, tantôt recourbée en arrière. Tous ces caractères sont si nets, surtout sur deux figures, dont l'une complètement recouverte d'un enduit stalagmitique, qu'ils sautent aux yeux.

» Il paraît hors de doute que ces figurations, dont la haute antiquité ne peut être niée, n'ont pu être exécutées que par des artistes reproduisant

les animaux qu'ils voyaient. Elles remontent donc à l'époque où vivaient, en France, le Mammouth et le Renne ; elles sont donc paléolithiques et très vraisemblablement magdaléniennes.

» Nous pensons que, abstraction faite de l'importance archéologique de cette découverte, l'étude de ces diverses figures pourra donner de précieux renseignements sur la faune quaternaire, figurée d'après nature par les artistes de l'époque. C'est surtout à ce titre que nous avons pensé pouvoir faire cette première Communication à l'Académie des Sciences, nous réservant de revenir en détail sur un grand nombre de points. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Rayons lumineux divergents à 180° du Soleil.* Note de M. Jean Mascart.

« Le lundi 9 septembre, après-midi, je me trouvais dans le voisinage de Bréval, à dix kilomètres environ de Mantes, à vol d'oiseau.

» A $6^h$ je fus frappé en apercevant, dans la direction approximative de Mantes (direction que je pourrais préciser), trois larges rayons lumineux divergents et qui s'élevaient à une hauteur de 30° sur l'horizon, à peu près symétriques par rapport au rayon vertical : ils se détachaient nettement sur un ciel très couvert, pluvieux, gris de plomb; le point d'émergence était à 180° du Soleil, dont on pouvait apprécier la position par une petite éclaircie à l'ouest, sans que le Soleil lui-même fût visible au point d'observation.

» La largeur de ces rayons était de 30° pour le rayon vertical, 35° pour les rayons obliques; les axes des rayons obliques étaient inclinés de 50° environ sur l'horizon; l'intensité lumineuse était légèrement décroissante en allant du rayon sud au rayon nord; la teinte blanc jaune, intermédiaire entre la lumière électrique d'un phare et celle d'un panache de soleil aperçu entre les nuages; les bords étaient légèrement flous, moins cependant que dans le cas des rayons d'un phare; le point d'émergence paraissait sensiblement au-dessous de l'horizon.

» A $6^h 15^m$ l'intensité décrut très rapidement, le ciel s'était presque entièrement recouvert et le phénomène ne tarda pas à disparaître : aucun mouvement appréciable ne fut sensible pendant l'observation; l'intensité lumineuse ne commençait guère à décroître que 20° au-dessus de l'horizon.

» J'ignore totalement à quoi rattacher ce phénomène. »

M. H. Tival adresse un complément à sa Note précédente sur « l'Application des ondes électriques à la transmission des variations lumineuses ».

Les deux Notes sont renvoyées à l'examen de MM. Cornu et Lippmann.

**M. Molinié** adresse une Lettre relative à sa précédente Communication « Sur la surproduction du maïs ».

(Commissaires : MM. Müntz, Schlœsing.)

La séance est levée à 3 heures trois quarts.

M. B.

---

**BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.**

---

Ouvrages reçus dans la séance du 16 septembre 1901.

*L'âge des dunes et des étangs de Gascogne,* par B. Saint-Jours. Bordeaux, imp. G. Gounouilhou, 1901 ; 1 fasc. in-16. (Hommage de l'Auteur.)

*Recherches sur la préhistoire de Châtel-Censoir et des territoires voisins,* par Émile Pallier. Clamecy, imp. de A. Staub, 1900 ; 1 fasc. in-8°. (Hommage de l'Auteur.)

*Description des machines et procédés pour lesquels des brevets d'invention ont été pris sous le régime de la loi du* 5 *juillet* 1844, publiée par les ordres de M. le Ministre du Commerce et de l'Industrie. Publication *in extenso,* 1899 (7e Partie). Paris, Imprimerie Nationale, 1901 ; 1 vol. in-8°.

*Ueber die morphologische Bedeutung der Monotremata* (*Sauromammalia*) *Ornithorhynchus und Echidna,* von Dr Vaclav Sixta ; s. l. n. d.

Trois Opuscules de M. Carlos Berg, ayant pour titres : *Silfidos argentinos* (*Coleopteros*). — *Namensänderung zweier Lepidopteren-Gattungen.* — *Comunicacionesictiologicas.* (Extraits des *Comunicaciones del Museo Nacional de Buenos Aires,* t. I, n° 9, 6 août 1901.) 3 fasc. in-8°. (Hommage de l'Auteur.)

*Der Hammer-Fennel'sche Tachymeter-Theodelit und die Tachymeterkippregel zur unmittelbaren Lattenablesung von horizontaldistanz und Höhenunterscheid.* Beschreibung und Anleitung zum Gebrauch des Instruments, erste Genauigkeitsversuche, mit 16 Figuren im Text und 2 lithographierten Tafeln, von Dr E. Hammer. Stuttgart, Konrad Wittwer, 1901 ; 1 fasc. in-4°.

*The Astronomical Journal,* founded by A Gould, edited by Seth-C. Chandler ; vol. XXII, nos 1, 2. Boston, 1901 ; 1 fasc. in-4°.

*Bulletin of the University of Kansas,* vol. II, n° 1, january 1901. Lawrence ; 1 fasc. in-8°.

*Bulletin of the Buffalo Society of natural Sciences,* vol. VII, n° 1 : *Guide to the Geology and Paleontology of Niagara falls and vicinity,* by A.-W. Grabau. Albany, 1901 ; 1 vol. in-8°.

*Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälles Handlingar.* Fjärde följden. Häft. III. Gœtborg, Wettergren et Kerber, 1901 ; 1 vol. in-8°.